Title	E^nの合同変換群の位相幾何学的特徴づけ
Author(s)	寺阪, 英孝
Citation	全国紙上数学談話会. 2(9) p.272-p.274
Issue Date	1948-05-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75227
rights	
Note	

93. E^n の合同変換群の位相幾何學的特徴づけ

寺阪 英孝 (1948. III. 29)

§1. *Hilbert* の *Grundlagen der Geometrie* (1930年版) の附録IVにある、平面幾何学の位相幾何学的基礎づけは、*Kerékjártó* や *Montgomery & Zippen* によつて三次元にまで拡張されてゐる。(*Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1940) の M. & Z. 氏論文参照) 一方 *Hilbert* も指摘してゐる折返しを基にする方法は、*Cairns* が実行したが、M & Z. 両氏も言及してゐるように、空間の場合にも軸の周りの廻轉といふことを基にして空間幾何学の基礎づけをする可能性があつた。事実二次空間では S^3 の向を変へない対合的位相変換では不動の *Jordan* 曲線が生ずる、といふ *Smith* の定理があつて平面の場合と大体同じに進むことが出来る。

近頃これを考へてゐる中に、n 次元 *Euclid* 又は *non-Euclid* 空間の幾何

学も軸対称の公理づけられることがわかつたので軽くあらましを御報告する。

§2. 空間は E^n ($n \geqq 2$) とする。E^n の対合的位相変換 T (即ち $T^2=1$) で、弓線の一対一開連続像 — これを弧といふことにする — を不動点集合とするものを考へ これを軸対称 *axial symmetrization* といふことにする。
[$n=2$ なら折返し $n=3$ なら直線の周りの 180° の回転に位相同等である。 $n \geqq 4$ の場合は考へられてゐただらうか?]

次にこゝで採用しようとする公理をあげる。

公理 I. $\mathfrak{G}$ は軸対称 及びそれの有限個の結合からなる。E^n の位相変換群である。

公理 II_1. E^n の任意の相異なる二点 $a \cdot b$ に對し、$a.b$ を不動点とする軸対称 T が $\mathfrak{G}$ の中に唯一つ存在する。

公理 II_2. $a_n \to a,\ b_n \to b \quad a \neq b$ のとき、$a_n,\ b_n$ を不動点とする軸対称 T_n は、$a.b$ を不動点とする軸対称 T に收斂する。[即ち E^n の各点 x に對し $T_n(x) \to T(x)$]

公理 III. $a \neq b$ ならば、第三の点 c に對し近傍 $U \ni c$ が存在して、$\mathfrak{G}$ のどの変換によつても $a..b$ を二つとも同時に U の中に写像することは出来ない [変換に遊び縮みなし]

《以上の如く公理 I, II_1 II_2, III によつて E^n が合同変換が位相幾何学的に特徴づけられる》 といふのが定理である。

こゝでもし II_2 が不用であることが分れば、既知の場合と公理の数が一致する。

§3. 証明は可成り長いので筋道だけ述べる。

異なる二点 $a.b$ を不動点とする $\mathfrak{G}$ の軸対称 T は唯一つあるから、T の不動点集合 — T の軸 — は $a.b$ で決定される。これを $a \cup b$ で表はす。T の軸をギリシア文字 τ で表はす。これが造らうとする幾何学の直線である。

今、$A\,B$ なる二つの異なる軸対称を考へる。B の軸 β が A で $\beta' = A(\beta)$ に移つたとすれば、β' は ABA で不動。又 β' 以外の点は動き、且 $(ABA)^2 = 1$ であるから《ABA は $A(\beta)$ を軸とする軸対称である。》

今 $c \in \alpha$ が A で $c' = A(c)$ に移つたとすれば $\gamma = c \cup c'$ の A による像

$A(\gamma)$はC, C' を通る線であるから γ と一致しなければならぬ。するとAによって γ 上の点は逆向の変換をうけるから γ 上にはAによる不動点が生ずる。これは勿論Aの軸 α 上になければならぬ。よつて

$$\gamma = C\cup C' = C\cup A(C)$$

は α と交はる所で $\gamma=C\cup A(C)$ を軸とする軸対称をCとすれば 前定理により ACAは $A(\gamma)$ を軸とする対称であるから $A(\gamma)=\gamma$ より $ACA=C$. 即ち

(1) $$AC=CA$$

然るに(1)が成立すれば今と逆のことが成立する。

《(1)が成立つとき 二軸 α, γ は互に直交する》といひ 交点 $\alpha\cap\gamma$ をCから α への射影（又は垂線の足）といふ。

《射影は点の連続函数である》

すると二点 a. b に対し 動点 x が a に近ければ点 x から $a\cup b=\alpha$ への垂線の足は a に近く。又この垂線 ξ に対し a の対称像 $a'=X(a)$ は a に近い。x が b に近ければ同じことが b について言へる。よつて或る x が存在し．x から α への垂線 ξ に対する a の対称像 $X(a)$ が b に一致する。このとき x から α への射影は a. b の中点の性質をもつので、線分 $[a. b]$ の中点といふ。これより軸上には互に合同な線分が軸対称によつて定められることが分る。

次に線分についての一様連続性が出せる。それには先づ

$$a_n\to a,\qquad b_n\to a$$

のとき $a_n\cup b_n$ 上の線分 $[a_n b_n]$ も $\to a$ であることを帰謬法によつて証明し、それより一様収斂を出す。

すると一点Oを通る軸は正則な曲線群になるから、その *cross-cut* たる球状形Sが考へられ S上の写像を適当に考へることにより二軸 $O\cup x$ $O\cup y$ の二等分線の存在が証明される。これより異なる軸上の線分についても合同（長短）が云々出来ることになつて空間の合同変換が確立する。

ここで得られる幾何学は *Euclid* R 及び双曲線幾何学である。